

ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ THI

Bài 1. (4 điểm)

Giải các phương trình, hệ phương trình sau:

a) $2x^2 - 7x + 4 = (x - 2)\sqrt{2x - 1}$

b)
$$\begin{cases} x^2y^2 + 1 = 2y^2 \\ (xy + 1)(2y - x) = 2x^3y^2 \end{cases}$$

Bài 2. (2 điểm)

Cho hàm số $y = 2 - \sqrt{-x^2 + 6x - 5}$ có đồ thị là (C). Tìm điểm M trên (C) sao cho khoảng cách từ M đến A(6; -2) nhỏ nhất.

Bài 3. (3 điểm)

Cho a, b là hai số dương thỏa điều kiện $a + b \leq 1$.

Chứng minh: $4a^2 - 4b^2 - \frac{3a}{b} - \frac{2b}{a} + 8a + 12b \leq 5$

Bài 4. (4 điểm)

Cho tam giác ABC, M là trung điểm của BC, D là điểm bất kỳ trên đoạn AM. BD cắt AC tại E, CD cắt AB tại F.

a) Chứng minh rằng: EF song song với BC.

b) Gọi H là điểm bất kỳ trên cạnh BC. Đường thẳng qua H song song với CD cắt AB tại P, đường thẳng qua H song song với BD cắt AC tại Q. PQ cắt DB và DC lần lượt tại R và S. Chứng minh rằng: PR = SQ.

Bài 5. (3 điểm)

Trên bảng viết 2015 số từ 1 đến 2015. Ta xóa đi 2 số a, b và viết thêm trên bảng số $ab + a + b$. Cứ tiếp tục như thế thì sau 2014 lần thực hiện thì trên bảng còn lại duy nhất một số. Hỏi số còn lại trên bảng là số nào? Vì sao?

Bài 6. (4 điểm)

Bảng giá cước xe taxi Mai Linh loại xe Kia Morning như sau: 10 ngàn đồng cho 0,6 km đầu tiên, 13 ngàn đồng/km cho đoạn tiếp theo nếu quãng đường đi hơn 0,6 km nhưng không quá 25 km và 11 ngàn đồng/km cho đoạn tiếp theo nếu quãng đường đi trên 25 km.

a) Hãy thiết lập hàm số $f(x)$ biểu thị giá tiền (ngàn đồng) phải trả cho x km di chuyển.

b) Vẽ đồ thị hàm số $f(x)$ với $0 < x \leq 50$.

c) Tìm quãng đường đi được nếu số tiền xe là 371 200 đồng.

HẾT

ĐÁP ÁN

Bài 1. (4 điểm)

a) $2x^2 - 7x + 4 = (x-2)\sqrt{2x-1}$ (*). Điều kiện $x \geq \frac{1}{2}$ (0,25đ)

Đặt $t = \sqrt{2x-1}$

(*) $\Leftrightarrow t^2 + (x-2)t - 2x^2 + 5x - 3 = 0 \Leftrightarrow t = x-1 \vee t = 3-2x$ (0,75đ)

$t = x-1 \Leftrightarrow x = 2 + \sqrt{2}$ (0,5đ)

$t = 3-2x \Leftrightarrow x = 1$ (0,5đ)

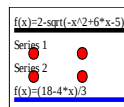
b) $\begin{cases} x^2 y^2 + 1 = 2y^2 \\ (xy+1)(2y-x) = 2x^3 y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + \frac{1}{y^2} = 2 \\ (x + \frac{1}{y})(2 - \frac{x}{y}) = 2x^3 \end{cases}$ (0,5đ)

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + \frac{1}{y^2} = 2 \\ (x + \frac{1}{y})(x^2 - \frac{x}{y} + \frac{1}{y^2}) = 2x^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + \frac{1}{y^2} = 2 \\ x^3 + \frac{1}{y^3} = 2x^3 \end{cases}$ (0,5đ)

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + \frac{1}{y^2} = 2 \\ x = \frac{1}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -1 \\ x = -1 \end{cases}$ (1đ)

Bài 2. (2 điểm)

Cho hàm số $y = 2 - \sqrt{-x^2 + 6x - 5}$ có đồ thị là (C). Tìm điểm M trên (C) sao cho khoảng cách từ M đến A(6; -2) nhỏ nhất.



Đồ thị hàm số là nửa đường tròn tâm I(3;2), bán kính $R = 2$.

(0,25đ)

Gọi M_0 là giao điểm của AI và nửa đường tròn.

Ta có $AM \geq AI - IM = AI - IM_0 = AM_0$ (0,25đ)

AM nhỏ nhất khi M trùng M_0 (0,25đ)

$\overrightarrow{IM_0} = \frac{R}{IA} \cdot \overrightarrow{IA}$ (0,5đ)

$\Rightarrow M_0(\frac{21}{5}; \frac{2}{5})$ (0,75đ)

Bài 3. (3 điểm)

Cho a, b là hai số dương thỏa điều kiện $a + b \leq 1$.

Chứng minh: $4a^2 - 4b^2 - \frac{3a}{b} - \frac{2b}{a} + 8a + 12b \leq 5$ (*)

Giải

$$(*) \Leftrightarrow 4a^2 - \frac{a}{b} - 4b^2 + 4b - 1 - \frac{2a}{b} - \frac{2b}{a} + 8a + 8b \leq 4 \quad (0,25đ)$$

$$\Leftrightarrow \frac{4a}{b} \left(ab - \frac{1}{4} \right) - (2b - 1)^2 - 2 \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) + 8(a + b) \leq 4 \quad (**)$$

$$\text{Ta có } ab \leq \frac{(a+b)^2}{4} \leq \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{4a}{b} \left(ab - \frac{1}{4} \right) \leq 0 \quad (0,5đ)$$

$$(2b - 1)^2 \geq 0 \Rightarrow -(2b - 1)^2 \leq 0 \quad (0,5đ)$$

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2 \Rightarrow -2 \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) \leq -4 \quad (0,5đ)$$

$$a + b \leq 1 \Rightarrow 8(a + b) \leq 8 \quad (0,5đ)$$

$$\text{Cộng 4 bất đẳng thức trên ta suy ra được } (**) \quad (0,5đ)$$

Bài 4. (4 điểm)

a/ Chứng minh rằng: EF song song với BC .

Kẻ đường thẳng qua F song song với BC cắt AM, AC lần lượt tại N, E' .

Do M là trung điểm của BC nên N là trung điểm FE' .

$$\text{Ta có } \frac{DN}{DM} = \frac{FN}{MC} = \frac{NE'}{MB}$$

$$\Rightarrow \triangle DMB \sim \triangle DNE' \Rightarrow BDM = E'DN \Rightarrow B, D, E' \text{ thẳng hàng}$$

$$\text{Hay } E' \text{ trùng } E \Rightarrow \text{đpcm.} \quad (1,5đ)$$

b/ Chứng minh rằng: $PR = SQ$

Gọi K là giao điểm của HP và DB ; L là giao điểm của HQ và DC

$$\Rightarrow HKDL \text{ là hình bình hành.} \quad (0,5đ)$$

Ta chứng minh $PQ \parallel KL$.

$$\text{Ta có } \frac{KH}{KP} = \frac{DC}{DF}, \frac{LH}{LQ} = \frac{DB}{DE} \quad (0,5đ)$$

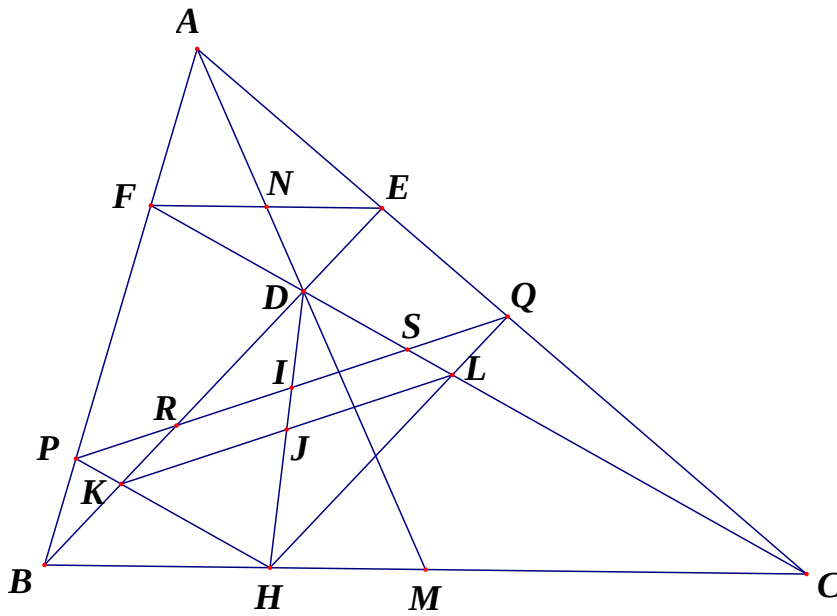
$$\text{Mà } \frac{DC}{DF} = \frac{DB}{DE} \text{ nên } \frac{KH}{KP} = \frac{LH}{LQ} \Rightarrow PQ \parallel KL. \quad (0,5đ)$$

Gọi I là giao điểm của DH và PQ ; J là giao điểm của DH và KL

$$HKDL \text{ là hình bình hành} \Rightarrow J \text{ là trung điểm của } KL \quad (0,5đ)$$

$$\text{mà } PQ \parallel KL \text{ nên suy ra } I \text{ đồng thời là trung điểm của } PQ \text{ và } RS. \quad (0,5đ)$$

$$\Rightarrow \text{đpcm.}$$



Bài 5. (3 điểm)

Trên bảng viết 2015 số từ 1 đến 2015. Ta xóa đi 2 số a, b và viết thêm trên bảng số $ab + a + b$. Cứ tiếp tục như thế thì sau 2014 lần thực hiện thì trên bảng còn lại duy nhất một số. Hỏi số còn lại trên bảng là số nào? Vì sao?

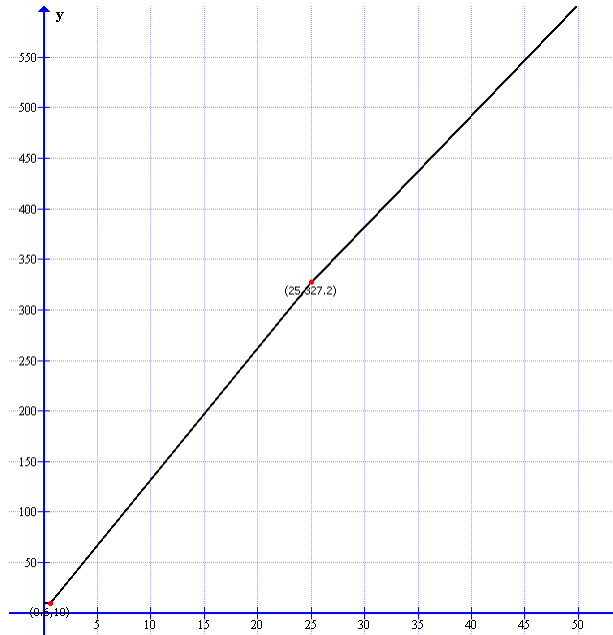
Giải.

Lấy tất cả các số trên bảng cộng với 1 rồi nhân chúng lại ta có kết quả 2016!. (1đ)

Ta có $(a+1)(b+1) = ab + a + b + 1$ (0,5đ)

Sau khi thay a, b bởi số $ab + a + b$ thì tích các số trên bảng sau khi cộng với 1 không đổi (bằng 2016!) (1đ)

Do đó số cuối cùng trên bảng là $2016! - 1$ (0,5đ)



Bài 6. (4 điểm)

a)

$$f(x) = \begin{cases} 10 & 0 < x \leq 0,6 \\ 10 + 13(x - 0,6) & 0,6 < x \leq 25 \\ 10 + 13(25 - 0,6) + 11(x - 25) & x > 25 \end{cases}$$

(1,5đ)

$$f(x) = \begin{cases} 10 & 0 < x \leq 0,6 \\ 13x + 2,2 & 0,6 < x \leq 25 \\ 11x + 52,2 & x > 25 \end{cases}$$

(0,5đ)

b) Đồ thị (1,5đ)

c) $f(x) = 371,2$
 $\Leftrightarrow 11x + 52,2 = 371,2 \Leftrightarrow x = 29$ (0,5đ)